(1.x.5) (i) Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη $\leq$. Θεωρούμε το σύνολο $A=\{x\in\mathbb{R},\ x>0\}$.
Το σύνολο A είναι κφ (αφού $0<x,\ \forall x\in A$)

άρα το 0 είναι κφ του A.
[Επίσης το -5 είναι κφ του A]
Το 0 είναι το μέγιστο κφ του A ($0=\inf A$)
Έστω a είναι κφ του A νδο $a\leq 0$
Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε εφόσον η $\leq$ είναι γραμμική θα ισχύει $a>0$.
Τότε $\frac{a}{2}>0$ συνεπώς $\frac{a}{2}\in A$ κ' $a>\frac{a}{2}$, άτοπο διότι το a είναι κφ του A.
Επομένως $a\leq 0$.
Έτσι δείχτηκε ότι $0=\inf A$.
Βλέπουμε ότι $\inf A=0\notin A$, άρα το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Το A επίσης δεν είναι αφ άρα δεν έχει μέγιστο ούτε supremum

(ii) Αν $B=\{x\in\mathbb{R},\ x<0\}$, τότε $0=\sup B$ κ' το B δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

(iii) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη διάταξη $\leq$, αν $A=\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\}=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$
$\max A=1$, άρα $\sup A=1$, ενώ $\underline{\inf A=0}$ (← άλλη φορά) με $0\notin A$
Άρα το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(iv) Έστω $\Omega\neq\emptyset$ κ' θεωρούμε το $(P(\Omega),\subseteq)$. Το $P(\Omega)$ έχει ελάχιστο στοιχείο το $\emptyset$ κ' μέγιστο στοιχείο το Ω.

(v) Έστω $A=\{\{\beta\},\{a,\beta\},\{a,\gamma\},\{\beta,\gamma\}\}$ διατεταγμένο με τη σχέση $\subseteq$.

→ Δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

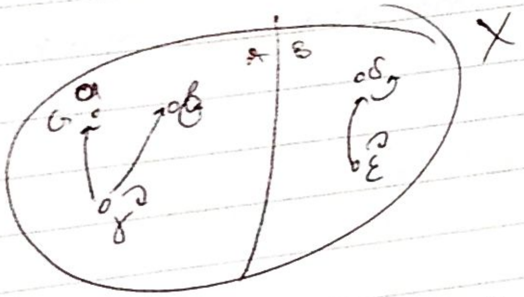
→ Δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

→ Τα $\{\alpha,\beta\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\gamma\}$ είναι maximal του A στο $(A,\subseteq)$

→ Τα $\{\beta\}, \{\alpha,\gamma\}$ είναι minimal στοιχεία του A στο $(A,\subseteq)$

(vi) Έστω $X = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ κ' $\leq = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\delta,\delta),(\varepsilon,\varepsilon),(\gamma,\alpha),(\gamma,\beta),(\varepsilon,\delta)\}$

Η οποία εύκολα ελέγχεται ότι είναι μερική διάταξη στο X



$A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$
$B = \{\delta,\varepsilon\}$

→ $\gamma = \min A$ (άρα κ' $\inf A = \gamma$)

→ Το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο ούτε supremum
(Το A δεν είναι άνω φ.

→ Τα α, β είναι maximal του A.

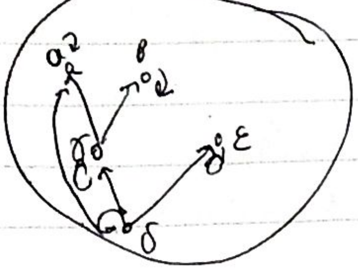
→ $\min B = \varepsilon, \max B = \delta$ (άρα $\inf B = \varepsilon, \sup B = \delta$)

→ Το X έχει τρία maximal στοιχεία α, β, δ

→ Το X έχει δύο minimal στοιχεία τα γ, ε

(vii) $X = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$

$\leq = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\delta,\delta),(\varepsilon,\varepsilon),(\gamma,\alpha),(\gamma,\beta),(\delta,\alpha),(\delta,\beta),(\delta,\gamma),(\delta,\varepsilon)\}$



→ $\min X = \delta$ (διότι $\delta \leq \delta$, $\delta \leq \alpha$, $\delta \leq \beta$, $\delta \leq \gamma$, $\delta \leq \varepsilon$)

→ Το X δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

→ Το X έχει τρία maximal στοιχεία τα $\alpha, \beta, \varepsilon$

Θέτουμε $A = \{\alpha, \beta\}$. → Το A είναι κφ κ' τα φράγματα του είναι ακριβώς τα σημεία γ, δ.

→ Το γ είναι το μέγιστο κφ του A ($\gamma = \inf A$)

→ Το A δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο

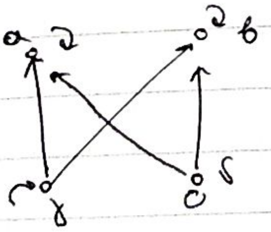
Θέτουμε $B = A^c = X - A = \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$

→ Το $\min B = \delta$ (άρα $\inf B = \delta$).

→ Το B δεν είναι αφ, άρα δεν έχει supremum ούτε maximum

(viii) $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$\leq \; = \{(\alpha,\alpha), (\beta,\beta), (\gamma,\gamma), (\delta,\delta), (\gamma,\alpha), (\gamma,\beta), (\delta,\alpha), (\delta,\beta)\}$



Θέτουμε $A = \{\gamma, \delta\}$

Το A είναι αφ, τα αφ του A είναι ακριβώς τα α, β. Τα α, β δεν συγκρίνονται μεταξύ τους (δηλαδή δεν ισχύει $\alpha \leq \beta$ ούτε $\beta \leq \alpha$)

Έτσι το A δεν έχει supremum

Το $\{a, b\}$ είναι κφ, αλλά δεν έχει infimum.

Πρόταση: Έστω $(E, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
(i) Κάθε μη κενό κ' αφ υποσύνολο του E έχει supremum
(ii) Κάθε μη κενό κ' κφ υποσύνολο του E έχει infimum

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (i)
Έστω A ένα μη κενό κ' κφ υποσύνολο του E
Θέτουμε ως B το σύνολο των κφ του A. Τότε $B \neq \emptyset$ (διότι A κφ)
Το B είναι αφ (διότι κάθε στοιχείο του A είναι αφ του B)
Από την υπόθεση (i) το B έχει supremum
Θέτουμε $y = \sup B$
Θδο y είναι το infimum του A
→ Το y είναι κφ του A. Πράγματι, $\forall x \in A$ το x είναι αφ του B, άρα $y \leq x$
→ Έστω γ τυχαίο κφ του A, τότε $\gamma \in B$ άρα $\gamma \leq \sup B = y$
Άρα το y είναι το μέγιστο από τα κφ του A, ώστε υπάρχουν.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Όμοια

Ορισμός: Έστω $(E, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(E, \leq)$ λέγεται τετορεθμέν
αν κάθε μη κενό κ' αφ υποσύνολο του E έχει supremum